

# 9. Zustandsschätzung

## Inhalt

### 9.1 Kalman-Filter

- Systemmodell
- Herleitung der Kalman-Gleichungen
- Interpretation und Beispiele
- Bestimmung der Varianz von Fehlersignalen
- Farbiges System- und Messrauschen

### 9.2 Erweitertes Kalman-Filter

## 9.1 Kalman-Filter

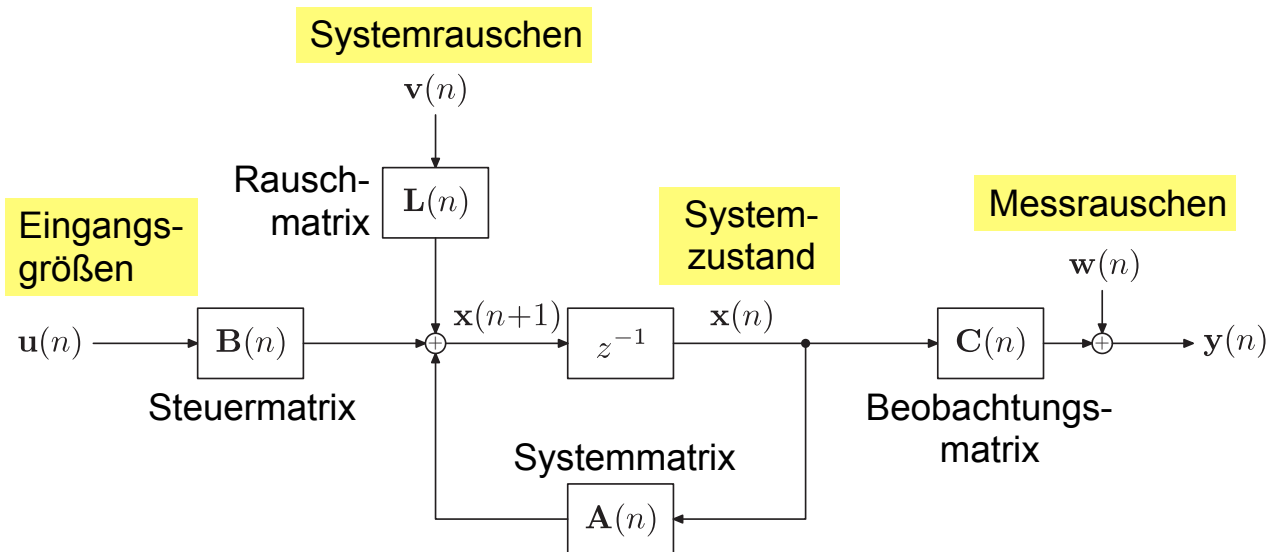
## 9.1 Kalman-Filter

- Prozess- und Signaldarstellung im Zustandsraum
- Modellierung von Prozess und Messvorgang durch **lineare** Modelle
- Ziel: Rekursive Schätzung des Prozesszustandes
- 1. Schritt: Prädiktion des Zustandes mittels Prozessmodell
- 2. Schritt: Verbesserung der Schätzung basierend auf Messwerten
- Gütemaß: Norm des quadratischen Schätzfehlers
- Entwurf besonders geeignet für:
  - zeitvariante Vorgänge (insbesondere auch zeitvariante Systeme)
  - Mehrgrößensysteme in Zustandsraumdarstellung
  - numerische Berechnung im Zeitbereich

- Lineares, zeitdiskretes, zeitvariantes Systemmodell:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n) \mathbf{x}(n) + \mathbf{B}(n) \mathbf{u}(n) + \mathbf{L}(n) \mathbf{v}(n)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n) \mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n)$$



## 9.1.1 Systemmodell

### Voraussetzungen

- Deterministische Eingangsgröße  $\mathbf{u}(n)$  (messbar)

- Systemrauschen  $\mathbf{v}(n)$  und Messrauschen  $\mathbf{w}(n)$  sind weiße, normalverteilte Rauschprozesse mit den Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}(n)$  bzw.  $\mathbf{R}(n)$ :

$$E\{\mathbf{v}(n)\} = \mathbf{0} \quad E\{\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(m)\} = \mathbf{Q}(n) \cdot \delta(n - m)$$

$$E\{\mathbf{w}(n)\} = \mathbf{0} \quad E\{\mathbf{w}(n) \mathbf{w}^T(m)\} = \mathbf{R}(n) \cdot \delta(n - m)$$

- Weitere Annahme: Messrauschen und Systemrauschen unkorreliert:

$$E\{\mathbf{v}(n) \mathbf{w}^T(m)\} = \mathbf{0} \quad \forall m, n$$

- Ferner werden der Erwartungswert des Anfangszustandes und die zugehörige Prädiktions-Kovarianzmatrix als bekannt angenommen:

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = E\{\mathbf{x}(0)\}, \quad \hat{\mathbf{P}}(0) = E\{(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0))(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0))^T\}$$

- Unter diesen Voraussetzungen ist das Kalman-Filter optimal bezüglich der Summe der quadratischen Schätzfehler

- Schätzkriterium: Minimierung des quadratischen Schätzfehlers:

$$E \left\{ \|\hat{\mathbf{x}}(n) - \mathbf{x}(n)\|^2 \middle| \mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(n) \right\} = E \left\{ \|\hat{\mathbf{x}}(n) - \mathbf{x}(n)\|^2 \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \rightarrow \min$$

- 1. Schritt: **Prädiktion** des Systemzustandes mittels Systemmodell

- Annahme einer „Statistik 2. Ordnung“: Erwartungswert und Varianz beschreiben die **A-priori-Dichte**  $p(\mathbf{x}(n+1) | \mathbf{Y}(n))$  des prädierten Zustandes vollständig ( $\rightarrow$  Normalverteilung):

$$\mathbf{x}^*(n+1) = E \left\{ \mathbf{x}(n+1) \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \quad \text{und}$$

$$\mathbf{P}^*(n+1) = E \left\{ (\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(n+1))(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(n+1))^T \middle| \mathbf{Y}(n) \right\}$$

- 2. **Filterschritt**: Verbesserung der Schätzung durch neuen Messwert

- Annahme: **A-posteriori-Dichte**  $p(\mathbf{x}(n+1) | \mathbf{Y}(n+1))$  auch normalverteilt:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = E \left\{ \mathbf{x}(n+1) \middle| \mathbf{Y}(n+1) \right\}$$

$$\hat{\mathbf{P}}(n+1) = E \left\{ (\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1))(\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1))^T \middle| \mathbf{Y}(n+1) \right\}$$

## 9.1.2 Herleitung der Kalman-Gleichungen

### Prädiktionsschritt

- **Prädiktions-Schätzwert**:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(n+1) &= E \left\{ \mathbf{x}(n+1) \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \\ &= E \left\{ \mathbf{A}(n) \mathbf{x}(n) + \mathbf{B}(n) \mathbf{u}(n) + \mathbf{L}(n) \mathbf{v}(n) \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \\ &= \mathbf{A}(n) \underbrace{E \left\{ \mathbf{x}(n) \middle| \mathbf{Y}(n) \right\}}_{\hat{\mathbf{x}}(n)} + \mathbf{B}(n) \mathbf{u}(n) + \mathbf{L}(n) \underbrace{E \left\{ \mathbf{v}(n) \middle| \mathbf{Y}(n) \right\}}_0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^*(n+1) = \mathbf{A}(n) \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{B}(n) \mathbf{u}(n)$$

- Mit der Zustandsdifferenzengl. ergibt sich der Prädiktions-Schätzfehler zu:

$$\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(n+1) = \mathbf{A}(n)(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) + \mathbf{L}(n) \mathbf{v}(n)$$

- Die Prädiktions-Kovarianzmatrix lautet damit:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(n+1) &= E \left\{ (\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(n+1))(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(n+1))^T \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \\ &= E \left\{ (\mathbf{A}(n)(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) + \mathbf{L}(n) \mathbf{v}(n))(\mathbf{A}(n)(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) + \mathbf{L}(n) \mathbf{v}(n))^T \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(n+1) &= \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(n+1)) (\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(n+1))^T \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{A}(n)(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) + \mathbf{L}(n) \mathbf{v}(n)) (\mathbf{A}(n)(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) + \mathbf{L}(n) \mathbf{v}(n))^T \middle| \mathbf{Y}(n) \right\} \end{aligned}$$

### ■ Prädiktions-Kovarianzmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*(n+1) &= \mathbf{A}(n) \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) (\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n))^T \middle| \mathbf{Y}(n) \right\}}_{= \hat{\mathbf{P}}(n)} \cdot \mathbf{A}^T(n) \\ &\quad + \mathbf{A}(n) \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) \mathbf{v}^T(n) \middle| \mathbf{Y}(n) \right\}}_{= [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]} \cdot \mathbf{L}^T(n) \\ &\quad + \mathbf{L}(n) \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left\{ \mathbf{v}(n) (\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n))^T \middle| \mathbf{Y}(n) \right\}}_{= [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]} \cdot \mathbf{A}^T(n) \\ &\quad + \mathbf{L}(n) \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left\{ \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \middle| \mathbf{Y}(n) \right\}}_{= \mathbf{Q}(n)} \cdot \mathbf{L}^T(n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}^*(n+1) = \mathbf{A}(n) \hat{\mathbf{P}}(n) \mathbf{A}^T(n) + \mathbf{L}(n) \mathbf{Q}(n) \mathbf{L}^T(n)$$

## 9.1.2 Herleitung der Kalman-Gleichungen

### Filterschritt (Innovation)

- Ansatz: Linearer Schätzer, der Prädiktionsschätzwert  $\mathbf{x}^*(n+1)$  und aktuellen Messwert  $\mathbf{y}(n+1)$  gewichtet summiert:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{K}^*(n+1) \mathbf{x}^*(n+1) + \mathbf{K}(n+1) \mathbf{y}(n+1) \quad (24)$$

- Bei Erwartungstreue sind beide Verstärkungsmatrizen voneinander abhängig. Durch Einsetzen der Ausgangsgleichung in (24) und Erwartungswertbildung ergibt sich bei Forderung von Erwartungstreue (vgl. Folie 6)

$$\mathbb{E}\{\hat{\mathbf{x}}(n)\} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(n)\} \Rightarrow \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{x}}(n+1)\} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(n+1)\}$$

ein **Schätzer** der folgenden Form [KSW08]:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{x}^*(n+1) + \mathbf{K}(n+1) (\mathbf{y}(n+1) - \underbrace{\mathbf{C}(n+1) \mathbf{x}^*(n+1)}_{\mathbf{y}^*(n+1)})$$

- **Filterschätzwert:** Korrektur des Prädiktionsschätzwertes  $\mathbf{x}^*(n+1)$  durch die mit  $\mathbf{K}(n+1)$  gewichtete Differenz des gemessenen Ausgangswertes  $\mathbf{y}(n+1)$  und des prädizierten Ausgangswertes  $\mathbf{C}(n+1) \mathbf{x}^*(n+1)$

## 9.1.2 Herleitung der Kalman-Gleichungen

- Für die **Filter-Kovarianzmatrix** ergibt sich damit die folgende Rekursionsgleichung (Details siehe [KSW08]):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(n+1) &= \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1)) (\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1))^T \mid \mathbf{Y}(n+1) \right\} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1) \mathbf{C}(n+1)) \cdot \mathbf{P}^*(n+1) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1) \mathbf{C}(n+1))^T \\ &\quad + \mathbf{K}(n+1) \mathbf{R}(n+1) \mathbf{K}^T(n+1)\end{aligned}$$

### Bestimmung der Verstärkungsmatrix

- Wahl einer optimalen Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  durch Minimierung des quadratischen Schätzfehlers ( $\rightarrow$  Kalman-Filter ist LS-Schätzer):

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1))^T (\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1)) \mid \mathbf{Y}(n+1) \right\} &\rightarrow \min \\ \Leftrightarrow \text{Spur}(\hat{\mathbf{P}}(n+1)) &\rightarrow \min\end{aligned}$$

- Durch Ableiten nach  $\mathbf{K}(n+1)$  und Nullsetzen folgt [KSW08]:

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}^T(n+1) (\mathbf{C}(n+1) \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}^T(n+1) + \mathbf{R}(n+1))^{-1}$$

## 9.1.2 Herleitung der Kalman-Gleichungen

### Zusammenfassung

#### Prädiktion

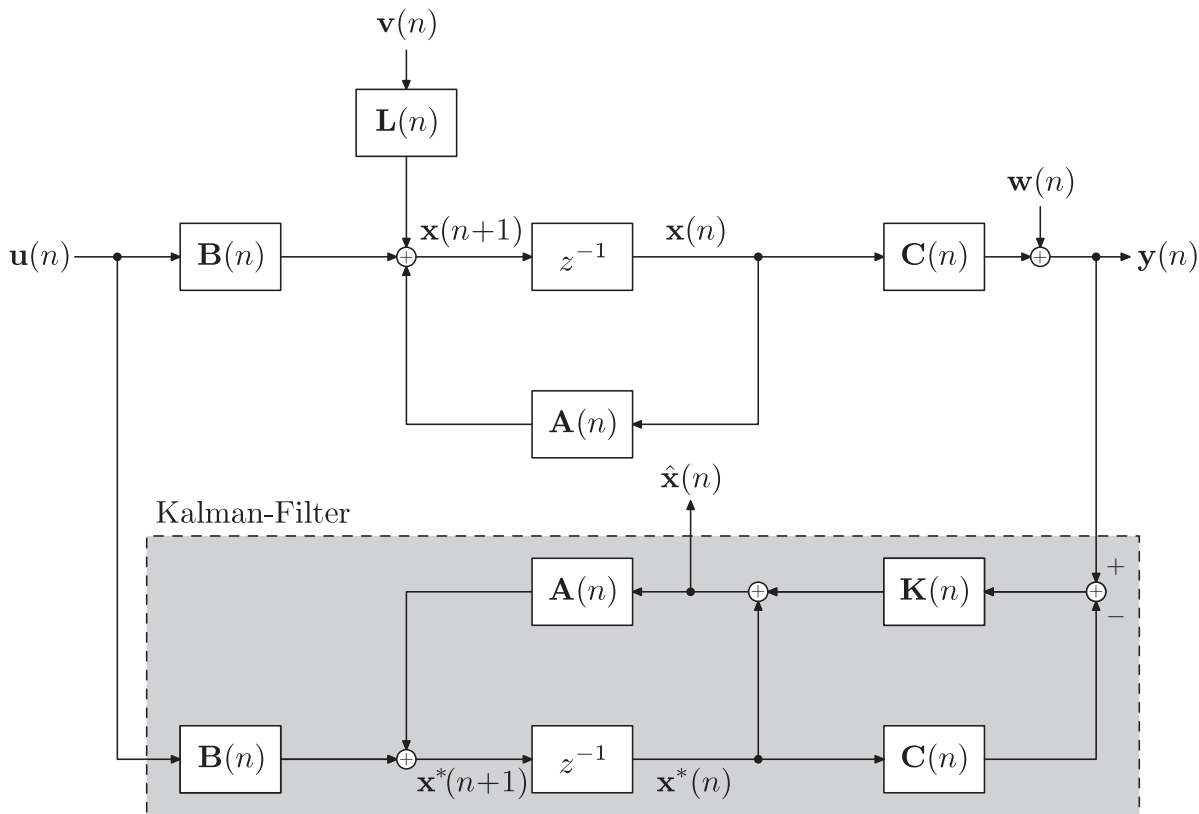
$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(n+1) &= \mathbf{A}(n) \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{B}(n) \mathbf{u}(n) \\ \mathbf{P}^*(n+1) &= \mathbf{A}(n) \hat{\mathbf{P}}(n) \mathbf{A}^T(n) + \mathbf{L}(n) \mathbf{Q}(n) \mathbf{L}^T(n)\end{aligned}$$

#### Verstärkung

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}^T(n+1) \\ &\quad \cdot (\mathbf{C}(n+1) \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}^T(n+1) + \mathbf{R}(n+1))^{-1}\end{aligned}$$

#### Filterung

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(n+1) &= \mathbf{x}^*(n+1) + \mathbf{K}(n+1) (\mathbf{y}(n+1) - \mathbf{C}(n+1) \mathbf{x}^*(n+1)) \\ \hat{\mathbf{P}}(n+1) &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1) \mathbf{C}(n+1)) \cdot \mathbf{P}^*(n+1) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1) \mathbf{C}(n+1))^T \\ &\quad + \mathbf{K}(n+1) \mathbf{R}(n+1) \mathbf{K}^T(n+1) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1) \mathbf{C}(n+1)) \cdot \mathbf{P}^*(n+1)\end{aligned}$$



## 9.1.3 Interpretation

### Diskussion

- Zur rekursiven Lösung der Gleichungen sind die **Startwerte** erforderlich; sind diese nicht bekannt, so kann die folgende Wahl getroffen werden:

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{P}}(0) = \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}^2 \cdot \mathbf{I}, \quad \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}^2 \rightarrow \infty$$

- Das Kalman-Filter hat die gleiche Struktur wie ein linearer Zustandsbeobachter, aber es bestehen wesentliche Unterschiede:
  - Anwendung auf zeitvariante Systeme dank der zeitlich veränderlichen Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  möglich
  - Verstärkungsmatrix berücksichtigt zeitlich veränderliche stochastische Eigenschaften des Systemrauschens  $\mathbf{v}$  und des Messrauschens  $\mathbf{w}$  mittels der entsprechenden Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}$  bzw.  $\mathbf{R}$
  - Daher eignet sich das Kalman-Filter zur Zustandsschätzung bei unzuverlässigen Messdaten und Störungen am Systemeingang oder bei einem ungenauen Systemmodell
  - Bei zeitinvarianten Systemen und stationären Rauschprozessen konvergiert die Verstärkungsmatrix gegen einen konstanten Wert

### ■ Filter-Schätzwert bei SISO-System:

$$\hat{x}(n+1) = x^*(n+1) + K(n+1) (y(n+1) - C(n+1) x^*(n+1))$$

$$K(n+1) = \frac{P^*(n+1) C(n+1)}{C^2(n+1) P^*(n+1) + R(n+1)}$$

### ■ Unzuverlässige Messdaten: $R(n+1) \gg Q(n)$

- Term  $R(n+1)$  im Nenner von  $K(n+1)$  dominiert  $\Rightarrow K(n+1) \approx 0$

- Filterschätzwert:  $\hat{x}(n+1) \approx x^*(n+1) = A(n) \hat{x}(n) + B(n) u(n)$

- Messwerte haben keinen Einfluss, Filter verlässt sich nur auf Modell

### ■ Ungenaueres Modell (starkes Systemrauschen): $Q(n) \gg R(n+1)$

- Großes  $Q(n) \Rightarrow$  großes  $P^*(n+1) \Rightarrow K(n+1) \approx 1/C(n+1)$

- Filterschätzwert:  $\hat{x}(n+1) = y(n+1)/C(n+1)$

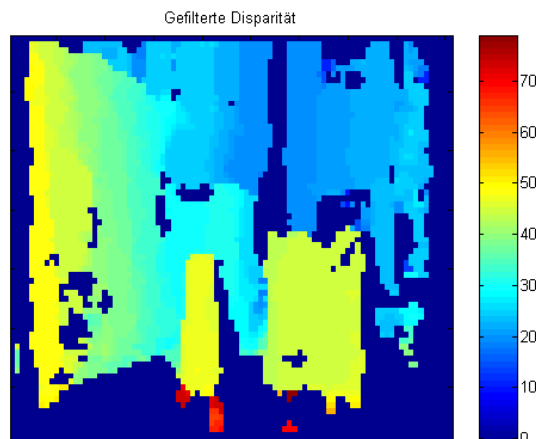
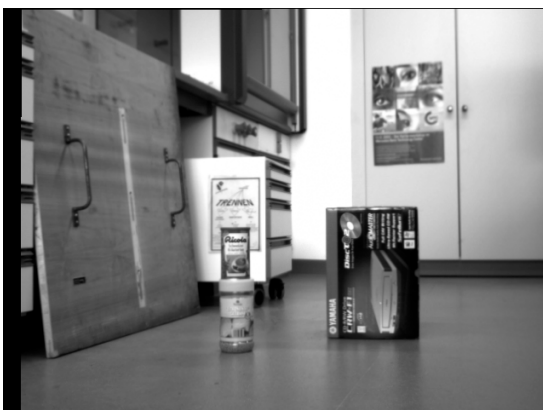
- Schätzwert berechnet sich allein aus Messwert

## 9.1.3 Interpretation

### Beispiel: Abstandsschätzung mit Stereosensor

- Umgebungserfassung für mobile Roboter
- Horizontale Verschiebung  $d$  von Hindernissen zwischen beiden Bildern (Disparität, Parallaxe) umgekehrt proportional zum Hindernisabstand  $x$ :

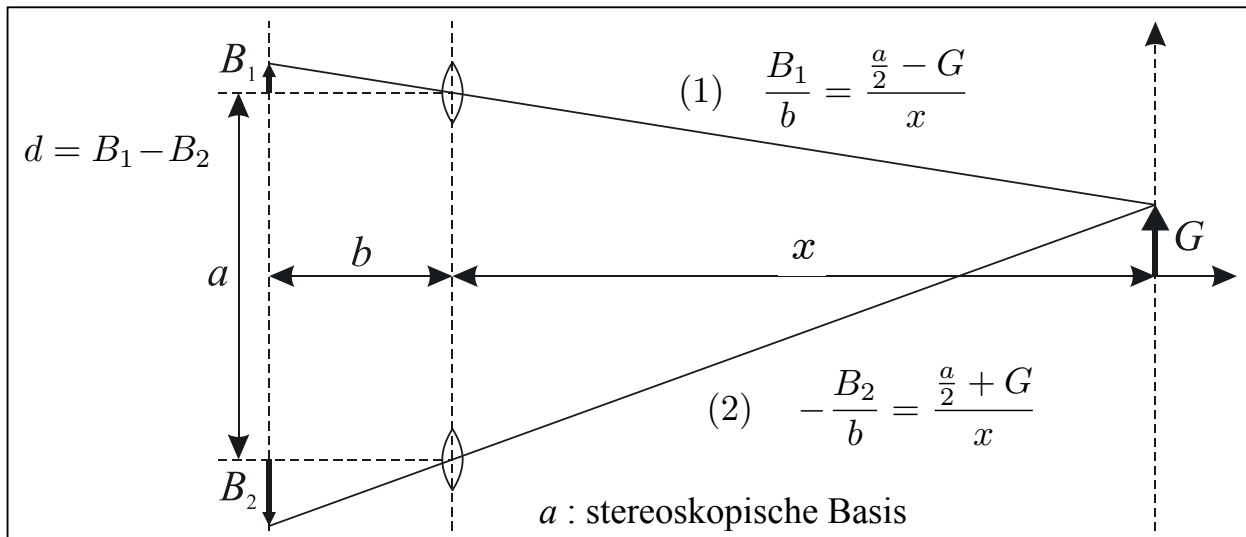
$$\frac{1}{d} = c x$$



## 9.1.3 Interpretation

### Prinzip des Stereosensors

- Betrachtung eines Objektpunktes aus 2 verschiedenen Blickwinkeln
- Berechnung der Gegenstandsweite ( $\rightarrow$  Relief) aus der Parallaxe  $d$



$$(1) + (2) : \quad x = \frac{a b}{d}$$

## 9.1.3 Interpretation

- Die eigene Beschleunigung  $u$  des Roboters in Längsrichtung wird mit einem Beschleunigungssensor erfasst
- Insgesamt ergeben sich mit den Definitionen

$$\mathbf{x}(n) = [x(n)] , \quad \mathbf{u}(n) = [u] , \quad \mathbf{v}(n) = [v(n)] , \quad \mathbf{w}(n) = [w(n)] ,$$

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ d \end{bmatrix} , \quad \mathbf{A} = [1] , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{t_A^2}{2} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{C} = [c] \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = [1]$$

die Zustandsgleichung:

$$x(n+1) = x(n) - \frac{t_A^2}{2} \cdot u(n) + v(n)$$

und die Ausgangsgleichung:

$$y(n) = c \cdot x(n) + w(n)$$

- Bei unzuverlässigen Messungen wird der letzte Schätzwert um die vom Roboter infolge der Beschleunigung  $u$  zurückgelegte Strecke korrigiert
- Bei starkem Systemrauschen wird  $x$  mittels der Messung  $y$  berechnet ■

- Kenntnis der Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  der Rauschprozesse erforderlich
- Selten durch theoretische Überlegungen bestimmbar
- Ist das fehlerbehaftete Signal messbar, erfolgt jedoch im Allgemeinen eine Varianzschätzung
- Gleitender Mittelwert als Schätzwert des Erwartungswertes:

$$\bar{y}(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y(n-i)$$

- Geschätzte Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{R}(n) \approx \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (y(n-i) - \bar{y}(n)) \cdot (y(n-i) - \bar{y}(n))^T$$

- Auch häufig in der Praxis: Heuristisches Einstellen der Kovarianzen als „Tuning-Parameter“
- Dieser Ansatz gestattet das Einbringen von Wissen in die Schätzung

## 9.1.5 Farbiges System- und Messrauschen

- Häufig ist das Systemrauschen nicht weiß
- Zur Modellierung von farbigem Rauschen wird ein eigener **Markov-Prozess** angesetzt und der Zustandsvektor entsprechend erweitert:  
 $\mathbf{x}_2(n+1) = \mathbf{A}_2(n) \mathbf{x}_2(n) + \mathbf{L}_2(n) \mathbf{v}(n)$        $\mathbf{x}_2(n)$ : Farbiges Rauschen  
 $\mathbf{v}(n)$ : Weißes Rauschen

- Die Zustandsgleichung lautet dann:

$$\mathbf{x}_1(n+1) = \mathbf{A}_1(n) \mathbf{x}_1(n) + \mathbf{B}(n) \mathbf{u}(n) + \mathbf{L}_1(n) \mathbf{x}_2(n)$$

- Mit dem Markov-Prozess erhält man ein erweitertes Zustandsraummodell:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(n+1) \\ \mathbf{x}_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(n) & \mathbf{L}_1(n) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(n) \\ \mathbf{x}_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(n) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n)$$

$$\mathbf{y}(n) = [\mathbf{C}(n) \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(n) \\ \mathbf{x}_2(n) \end{bmatrix} + \mathbf{w}(n)$$

- Ist auch das Messrauschen farbig, so ist der Zustandsraum entsprechend zu erweitern

## 9.2 Erweitertes Kalman-Filter

## 9.2 Erweitertes Kalman-Filter

- Bisher: Lineares Systemmodell
- Jetzt: Allgemeines **nichtlineares** Systemmodell:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{v}(n)) ,$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{w}(n))$$

- Rauschprozesse weiterhin weiß, mittelwertfrei und normalverteilt:

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{v}(n) \cdot \mathbf{v}^T(m) \} = \mathbf{Q}(n) \cdot \delta(n-m) ,$$

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{w}(n) \cdot \mathbf{w}^T(m) \} = \mathbf{R}(n) \cdot \delta(n-m)$$

- Linearisierung der Systemfunktion  $\mathbf{f}$  um den Arbeitspunkt, wobei für  $\mathbf{x}(n)$  der aktuelle **Schätzwert**  $\hat{\mathbf{x}}(n)$  und für das Systemrauschen  $\mathbf{v}(n)$  wegen der Mittelwertfreiheit null gewählt wird:

$$\mathbf{x}(n+1) \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{0}) + \mathbf{A}_f(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) + \mathbf{L}_f(n) \cdot \mathbf{v}(n)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{A}_f = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{0})} \quad \text{und} \quad \mathbf{L}_f = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{0})}$$

- Linearisierung der Ausgangsfunktion  $g$  um aktuell **prädictierten Schätzwert**  $\mathbf{x}^*(n)$  (dabei wird  $\mathbf{w}(n)$  ebenfalls zu null gesetzt):

$$\mathbf{y}(n) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{0}) + \mathbf{C}_g(\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^*(n)) + \mathbf{L}_g(n) \cdot \mathbf{w}(n)$$

$$\text{mit } \mathbf{C}_g = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^*(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{0})} \quad \text{und} \quad \mathbf{L}_g = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\mathbf{x}^*(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{0})}$$

- Prädiktionsschritt:  $\mathbf{x}^*(n+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{0})$   
 $\mathbf{P}^*(n+1) = \mathbf{A}_f(n) \hat{\mathbf{P}}(n) \mathbf{A}_f^T(n) + \mathbf{L}_f(n) \mathbf{Q}(n) \mathbf{L}_f^T(n)$

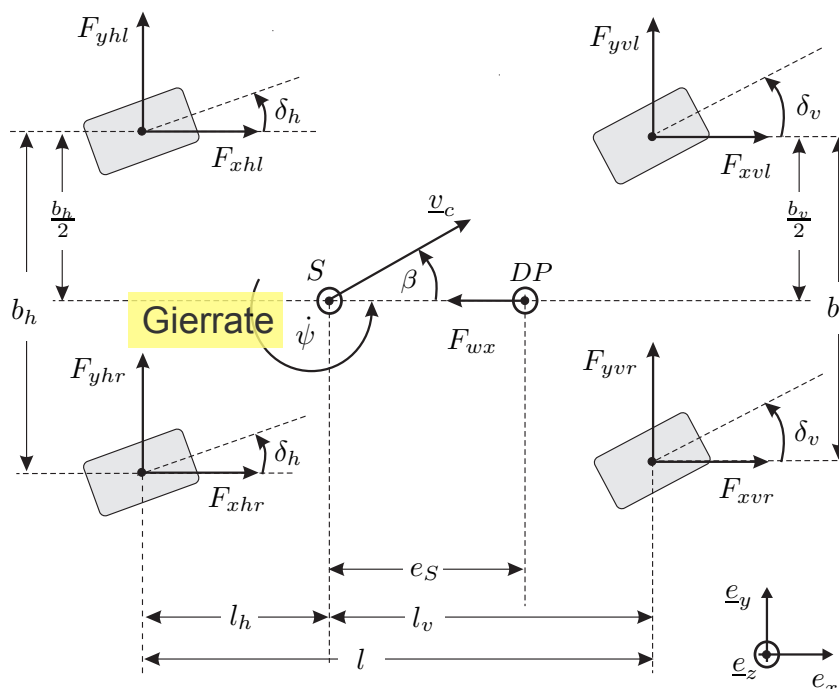
- Verstärkung und Filterschritt:

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}_g^T(n+1) \left( \mathbf{C}_g(n+1) \mathbf{P}^*(n+1) \mathbf{C}_g^T(n+1) + \mathbf{L}_g(n+1) \mathbf{R}(n+1) \mathbf{L}_g^T(n+1) \right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{x}^*(n+1) + \mathbf{K}(n+1) (\mathbf{y}(n+1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(n+1), \mathbf{u}(n+1), \mathbf{0}))$$

$$\hat{\mathbf{P}}(n+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1) \mathbf{C}_g(n+1)) \cdot \mathbf{P}^*(n+1)$$

### Beispiel: Schätzung des Schwimmwinkels $\beta$ eines nichtlinearen Zweispurmodells



## 9.2 Erweitertes Kalman-Filter

- Schwimmwinkel  $\beta$  ist eine zentrale Größe der Fahrzeugdynamik und erlaubt Aussagen über Stabilität des Fahrzeugs
- Wird der Schwimmwinkel sehr groß oder wächst er stark an, wird die Fahrsituation kritisch
- Modellbildung über Kräfte- und Momentengleichgewicht:

$$\sum_k \mathbf{F}_k = m \cdot \mathbf{a},$$

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{J}_z \cdot \ddot{\psi}$$

- Nichtlineares Zustandsraummodell:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  
 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

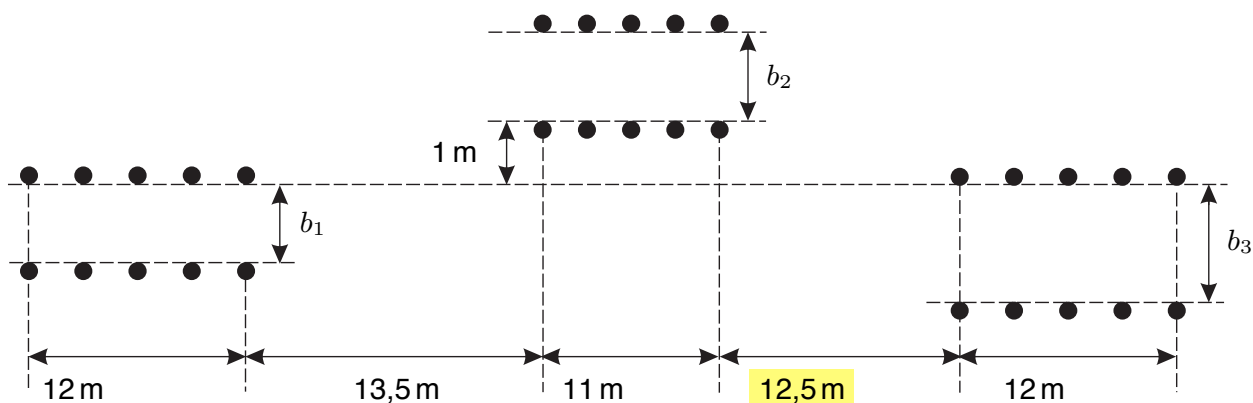
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v & \beta & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_{lv} & F_{lv} & F_{lh} & F_{lh} & \delta_v & \delta_h \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \omega_{vl} & \omega_{vr} & \omega_{hl} & \omega_{hr} & a_y & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

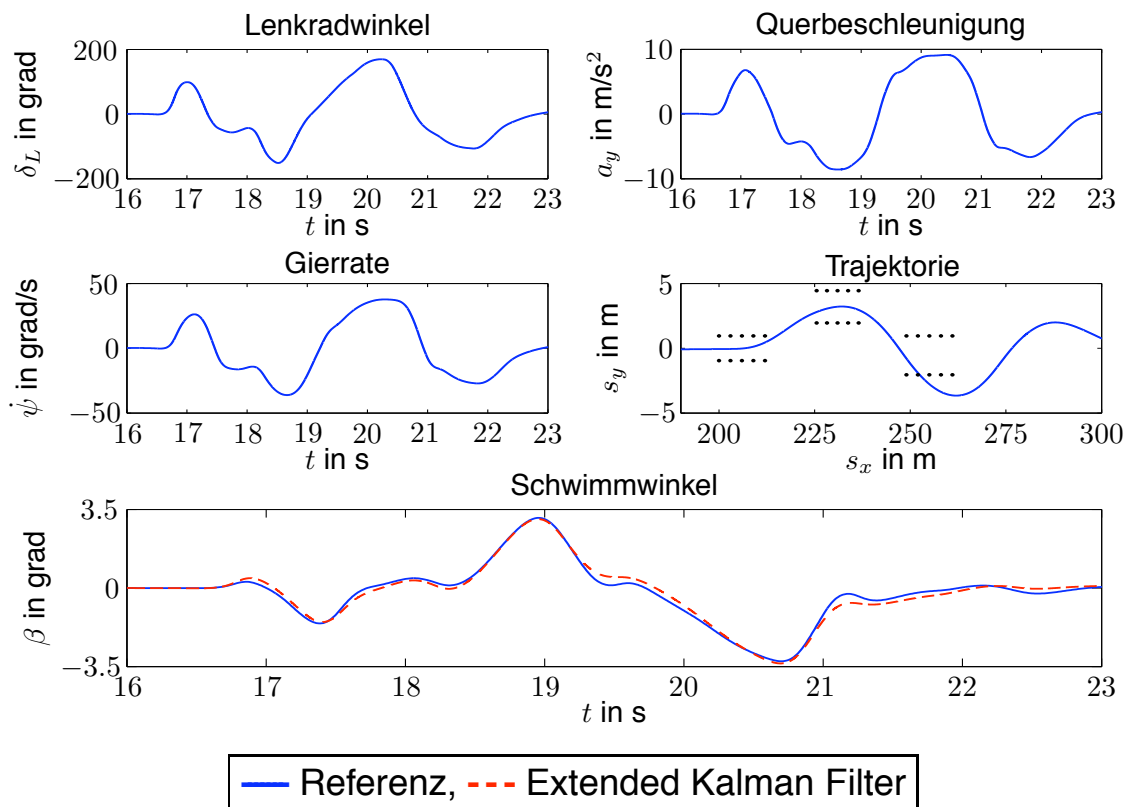
## 9.2 Erweitertes Kalman-Filter

- Zur Validierung des EKF-Einsatzes wird ein Fahrmanöver betrachtet
- Es soll der Schwimmwinkel während eines Ausweichmanövers geschätzt werden
- Um möglichst hohe Querbeschleunigungen gegen Ende des Manövers zu erreichen, steht dem Fahrer beim Wechsel zurück auf die ursprüngliche Spur **ein Meter weniger** zur Verfügung

### Fahrmanöver nach ISO 3888-2



## 9.2 Erweitertes Kalman-Filter



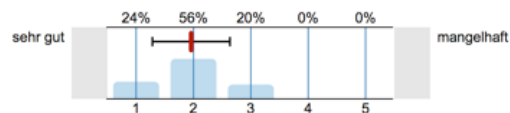
## 9.2 Erweitertes Kalman-Filter



# Evaluierungsergebnisse 2012/13

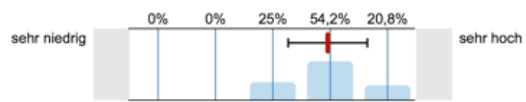
## Evaluierung – Qualitätsrichtlinien

Bitte benoten Sie die Lehrveranstaltung insgesamt.



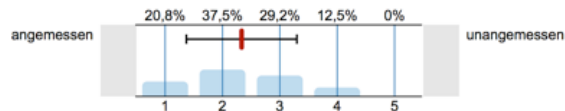
n=25  
mw=1,96  
s=0,68

Wie hoch ist der notwendige Arbeitsaufwand für diese Lehrveranstaltung?



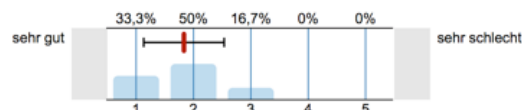
n=24  
mw=3,96  
s=0,69

Der notwendige Arbeitsaufwand für die Lehrveranstaltung ist...



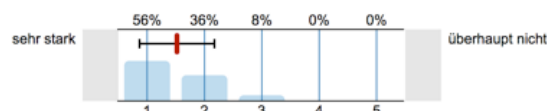
n=24  
mw=2,33  
s=0,96

Wie ist die Lehrveranstaltung strukturiert?



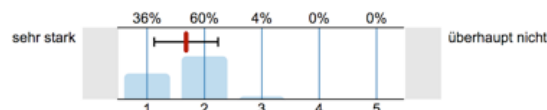
n=24  
mw=1,83  
s=0,7

Wirkt der/die Dozent/in engagiert und motiviert bei der Durchführung der Lehrveranstaltung?



n=25  
mw=1,52  
s=0,65

Geht der/die Dozent/in auf Fragen und Belange der Studierenden ein?



n=25  
mw=1,68  
s=0,56